数理解析研究所講究録
1067巻 1998年 1-14

ベルグマン計量の調和変動による面の rigidity について

滋賀大学　山口博史 (Hiroshi Yamaguchi)
京都工織大　米谷文男 (Fumio Maitani)

1　擬等角正則変動

0 の近傍を動く複素パラメーター t に依存して擬等角同値に変動しているリーマン面 R_t がある。R_0 から R_t 上への擬等角写像 h_t のベルトラミー微分 $\mu_t = \mu(z,t)\frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{(h_t)_{\bar{z}}d\bar{z}}{(h_t)_z dz}$ が次の条件を満足すると仮定する。

(i) $\mu(z,0)=0$、$\mu(z,t)$ は可測で、$esssup_R|\mu(z,t)|<1$

(ii) 各 t に対して正数 ϵ_t, M_t が次を満足するようにとれる。

$$|\epsilon| < \epsilon_t \Longrightarrow esssup_R|\mu(z,t+\epsilon)-\mu(z,t)| < |\epsilon| M_t$$

(iii) 殆どすべての z に対して $t \longrightarrow \mu(z,t)$ は正則

この正則族$\{R_t\}$を擬等角正則変動と呼ぼう。

2 挙動空間

リーマン面 R 上2乗可積分な複素微分の空間 Λ は内積

$$< \omega, \sigma >= Real\ part\ of \iint_R \omega \bigwedge *\bar{\sigma} = \Re(\omega, \sigma)$$

によって実ヒルベルト空間と考えることができる。次の部分空間を利用する。

$\Lambda_h = \{\lambda \in \Lambda : \lambda$ は調和微分$\}$,

$\Lambda_{eo} = \{\lambda \in \Lambda : \lambda$ は Λ_h に直交する閉微分$\}$,

$\Gamma_h = \{\lambda \in \Lambda_h : \lambda$ は実微分$\}$.

Γ_x は Γ_h の部分空間として、$*\Gamma_x^{\perp}$ で Γ_x の Γ_h における直交補空間の共役微分の空間を表わし、$\Lambda_x = \Gamma_x + i * \Gamma_x^{\perp}$ と置き挙動空間と呼ぶ。

ここでは $\Lambda_x(R_t) \circ h_t \subseteq \Lambda_x(R_0) + \Lambda_{eo}(R_0)$ を満たしているものとする。

例えば、$i\Gamma_h, \Gamma_h$ は挙動空間でこの条件を満たしている。

3　有理型微分の変分

以上の前提の下に次がいえる[4]。

定理 1. R_t 上の有理型微分 ϕ^t が $\phi^t \circ h_t - \phi^0 \in \Lambda_x + \Lambda_{eo}$ を満たし、ϕ^0 の極は μ_t の台の外にあるとするとき次の条件を満足する R_t 上の微分 $\phi_u^t, \phi_v^t \in \Lambda_x + \Lambda_{eo}$ がある。

$$\lim_{\tilde{u}\to 0} \|\frac{\phi^{t+\tilde{u}} \circ h_{t+\tilde{u}} \circ h_t^{-1} - \phi^t}{\tilde{u}} - \phi_u^t\| = 0,$$

$$\lim_{\tilde{v}\to 0} \|\frac{\phi^{t+i\tilde{v}} \circ h_{t+i\tilde{v}} \circ h_t^{-1} - \phi^t}{\tilde{v}} - \phi_v^t\| = 0.$$

更に、$\phi_u^t + i\phi_v^t = i * (\phi_u^t + i\phi_v^t)$ でこれは正則微分となる。

$$\frac{\partial \phi^t}{\partial t} = \frac{1}{2}(\phi_u^t - i\phi_v^t),\ \frac{\partial \phi^t}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{2}(\phi_u^t + i\phi_v^t)$$

と置く。

4　基本微分

μ_t の台に含まれない点 p があるとし、p を中心とするひとつの局所円盤$V = \{z : |z| < 1\}$ を μ_t の台と交わらないよう

にとる。

次の条件を満足する R_t 上 $h_t(p)$ にのみ極を持つ有理型微分 φ_n^t, ψ_n^t がある。

(i) $\varphi_n^t - \frac{dz}{z^{n+1}}$、$\psi_n^t - \frac{dz}{z^{n+1}}$ は $V_t = h_t(V)$ 上正則、

(z は V_t 上の局所変数とみなす)、

(ii) $R_t - V_t$ 上 φ_n^t は $i\Gamma_h + \Lambda_{eo}$, ψ_n^t は $\Gamma_h + \Lambda_{eo}$ の元に一致する。

実際 χ を $\{z : |z| < \frac{1}{2}\}$ 上 1、V の外で 0 となっている C^∞ 級の実関数として直交分解

$$\frac{1}{2}(-\frac{1}{n}d\frac{\chi}{z^n} + \frac{i}{n} * d\frac{\chi}{z^n}) = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\omega_1 \in i\Gamma_h + \Lambda_{eo},\ \omega_2 \in \Gamma_h + *\Lambda_{eo}$$

を用いて、$\sigma = -\frac{1}{2n}d\frac{\chi}{z^n} - \omega_1 = -\frac{i}{2n} * d\frac{\chi}{z^n} + \omega_2$ と置けば、これは $h_t(p)$ 以外で調和な微分となる。$\sigma + i*\sigma = \frac{1}{n}d\frac{-\chi}{z^n} - \omega_1 + i*\omega_2$ は $h_t(p)$ に $n+1$ 位の極を持つ有理型微分で V_t の外で $i\Gamma_h + \Lambda_{eo}$ の元に一致し φ_n^t の条件を満たしている。同様に $\omega_1' \in \Gamma_h + \Lambda_{eo}$, $\omega_2' \in i\Gamma_h + *\Lambda_{eo}$ の直交分解を用いれば、ψ_n^t

が得られる。

以下では $\varphi_1^t=\varphi^t, \psi_1^t=\psi^t$ と省略して書くことにしよう。

5 ベルグマン核

点 $h_t(p)$ に関する R_t 上のベルグマン核を $K_t=\hat{K}_t dz$、即ち R_t 上の2乗可積分な正則微分 $\omega=\hat{\omega}dz$ に対して $(\omega, K_t)=\hat{\omega}(0)$ を満たしているとする。

定理 **2.** [5

$$K_t=\frac{1}{4\pi}(\varphi^t-\psi^t)$$

正則微分 $\omega\in\Lambda$ に対して次の主値積分を考える。

$$(\omega,\varphi^t)_V=\lim_{\epsilon\to 0}\iint_{V-V_\epsilon}\omega\wedge*\overline{\varphi^t}=i\int_{\partial V}w\overline{\varphi^t},$$

ここで $V_\epsilon=\{z;|z|<\epsilon\}$, $\omega=dw\ on\ V$ としている。φ^t の実部は V の外で Λ_{eo} の元に一致しているからそれを σ_1 と置く。

$$(\omega,\sigma_1+i*\sigma_1)_V=(*\omega,*\sigma_1)_V-i(\omega,*\sigma_1)_V$$

$$= 2i \iint dw \wedge \sigma_1 = 2i \int_{\partial V} w \Re \varphi^t$$

$$(\omega, \varphi^t) = (\omega, \sigma_1 + i * \sigma_1) - (\omega, \sigma_1 + i * \sigma_1)_V + (\omega, \varphi^t)_V$$

$$= -2i \int_{\partial V} w \Re \varphi^t + i \int_{\partial V} w \overline{\varphi^t}$$

$$= -i \int_{\partial V} w \varphi^t = 2\pi \frac{dw}{dz}(0) = 2\pi \hat{\omega}(0)$$

同様にψ^t の虚部は V の外で Λ_{eo} の元に一致しているから

それを τ_1 と置けば、

$$(\omega, \psi^t) = (\omega, - * \tau_1 + i\tau_1) - (\omega, - * \tau_1 + i\tau_1)_V + (\omega, \psi^t)_V$$

$$= 2(\omega, *\tau_1)_V + (\omega, \psi^t)_V = -2 \int_{\partial V} w \Im \psi^t + i \int_{\partial V} w \overline{\psi^t}$$

$$= i \int_{\partial V} w \varphi^t = -2\pi \frac{dw}{dz}(0) = -2\pi \hat{\omega}(0).$$

従って主張を得る。

$L_t = \varphi^t + \psi^t$ と置く。次の変分公式が成立している[4]。

定理 3. $$\frac{\partial \hat{K}_t(p)}{\partial t} = (K_t, \frac{\partial K_t}{\partial \bar{t}}),$$

$$\frac{\partial^2 \hat{K}_t(p)}{\partial \bar{t} \partial t} = (\frac{\partial K_t}{\partial \bar{t}}, \frac{\partial K_t}{\partial \bar{t}}) + (\frac{\partial L_t}{\partial \bar{t}}, \frac{\partial L_t}{\partial \bar{t}}),$$

$$\frac{\partial^2 \log \hat{K}_t(p)}{\partial \bar{t} \partial t} = \frac{1}{\hat{K}_t(p)} \{ (\frac{\partial K_t}{\partial \bar{t}}, \frac{\partial K_t}{\partial \bar{t}}) + (\frac{\partial L_t}{\partial \bar{t}}, \frac{\partial L_t}{\partial \bar{t}}) \}$$

$$-\frac{1}{\hat{K}_t(p)^2}|(\frac{\partial K_t}{\partial \bar{t}}, K_t)|^2$$

今、$\log \hat{K}_t(p)$ が調和であるとすれば、

$$\frac{\partial L_t}{\partial \bar{t}} = 0 \text{ 且つ } \frac{\partial K_t}{\partial \bar{t}} = (a+ib)K_t, \ (a, b \text{ は実数})$$

を満たす。これより

$$\frac{\partial \psi^t}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \varphi^t}{\partial \bar{t}}, \frac{\partial K_t}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \varphi^t}{\partial \bar{t}}$$

を得る。そこで $t = u + iv$, $(u, v$ は実数) として

$$\frac{\partial \varphi^t}{\partial u} - a\varphi^t + ib\psi^t = a\psi^t - ib\varphi^t - i\frac{\partial \varphi^t}{\partial v}$$

が従う。この左辺は境界で純虚な挙動を持ち右辺は境界で純実な挙動を持つ。R_0 は解析曲線からなる境界部分を持ち、その境界点から点 p まで μ_t の台と交わらずに曲線が引ければ、そこで上式の左辺も右辺も正則で、従って 0 となる。そして $a = b = 0$ で、台以外で

$$\frac{\partial \varphi^t}{\partial u} = \frac{\partial \varphi^t}{\partial v} = 0$$

を得る。さらに、面全体で

$$\frac{\partial \varphi^t}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \psi^t}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial K_t}{\partial \bar{t}} = 0,$$

だからφ^t, ψ^t, K_t は t に関して正則に動いている。又、$w=\frac{\varphi^t}{\psi^t}$ は R_t 上の有理型函数で境界上純虚な値を取っている。従って、R_t は w によって虚軸上にのみ slit を持った被覆面として表現され、$w=w(z,t)$ と考えて z を固定すれば t に関して正則に動いていることから、これらの slit は動かず分岐点のみが動いていることになる。点 p において w は展開

$$w=\frac{\varphi^t}{\psi^t}=1+\sum_{n=1}c_nz^n$$

を持つ。

$$\hat{\varphi}^t=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}a_nz^n,\quad \hat{\psi}^t=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}b_nz^n$$

と置けば

$$\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}a_nz^n=(\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}b_nz^n)(1+\sum_{n=1}c_nz^n)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{c_1}{z}+(b_0+c_2)+(b_1+c_3)z+\ldots,$$

よって $c_1=0,\ b_0+c_2=a_0$ を得る。従って $c_2=a_0-b_0=\hat{K}_t(p)=(K_t,K_t)>0$ 故点 p は1位の分岐点として表されている。R_t は有限型の境界付きリーマン面とすればそのダブ

ルまで φ^t, ψ^t を拡張して考えることができる。そのコンパクトリーマン面も w によって被覆面として表現されている。点 p は $w=1$ の上にありダブルのインボルションで点 p に対応する点は $w=-1$ の上にある。

さて、この被覆面上で考えて

$$\varphi^t = \tilde{\Phi}(t,w)dw = \tilde{\Phi}(t,w)(w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}),$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \varphi^t}{\partial \bar{t}} \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(t,w)}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}(t,w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \bar{t}}\right)(w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}) \\ &\qquad + \tilde{\Phi}(t,w)\left(\frac{\partial w_z}{\partial \bar{t}} dz + \frac{\partial w_{\bar{z}}}{\partial \bar{t}} d\bar{z}\right). \end{aligned}$$

ここで、

$$0 = \frac{\partial w}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial w_z}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial w_{\bar{z}}}{\partial \bar{t}}.$$

従って、

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Phi}(t,w)}{\partial \bar{t}}(w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}).$$

即ち、w を固定して $\bar{t}$ による偏微分

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(t,w)}{\partial \bar{t}} = 0,$$

だから、Hartogs の定理より $\tilde{\Phi}(t,w)$ は t,w に関して正則となる。φ^t は境界上純虚な挙動を持っていたから $\tilde{\Phi}(t,w)$ は w を固定すれば境界上定数、従って被覆面上定数となる。ここで動いている分岐点があれば $\tilde{\Phi}(t,w)$ は分岐点でつながった被覆葉で同じ挙動(Taylor展開) を持つことになる。その同じ w 上の 2 点から一方を p まで分岐点には当たらないような曲線に沿って解析接続すれば 他方は p 又は p 以外の点に至る。点 p に於いて φ^t は展開

$$\varphi^t = (\frac{\sqrt{c_1}}{2(w-1)^{\frac{3}{2}}} + \ldots)dw$$

を持つ。p 以外の点に至る場合そこでは φ^t は正則であり、p に至る場合にも異なる被覆葉で異なる展開を持つことになって解析接続の結果と矛盾することになる。結局動く分岐点はないこととなり R_t はまったく動かない。

以上によって次の主張を得る。

定理 **4.** 有限型の境界付きリーマン面 R_t が擬等角正則変動しているとき、$\log \hat{K}_t(p)$ が t に関し調和に動くならば、R_t はすべて等角同値。

6 ロバン定数

点 $h_t(p)$ を極に持つ R_t 上のグリーン関数を $G_t = G_t(,p)$ として$\psi_p^t = dG_t + i * dG_t$ と置く。

$$\gamma_t(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} G_t(z)\frac{dz}{z} + \log\epsilon$$

を $h_t(p)$ に於けるロバン定数と呼ぶ。擬等角正則変動の下に次の変分公式を持つ(4。

定理 5. $$\frac{\partial\gamma_t(p)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}(\frac{\partial\psi_p^t}{\partial t}, \overline{\psi_p^t}),$$

$$\frac{\partial^2\gamma_t(p)}{\partial\bar{t}\partial t} = -\frac{1}{2\pi}(\frac{\partial\psi_p^t}{\partial\bar{t}}, \frac{\partial\psi_p^t}{\partial\bar{t}}).$$

ここで、$\gamma_t(p)$ とψ_p^t の零でない点 q における $\gamma_t(q)$ が共に調和であるとすれば、

$$\frac{\partial\psi_p^t}{\partial\bar{t}} = 0, \quad \frac{\partial\psi_q^t}{\partial\bar{t}} = 0.$$

このときベルグマン核の時と同様にして次を得る。$w = \frac{\psi_p^t}{\psi_q^t}$ は R_t 上の有理型函数で境界上純実な値を取っている。従って、 R_t は w によって実軸上にのみ slit を持った被覆面として表現され、$w = w(z,t)$ と考えて z を固定すれば t に

関して正則に動いていることからこれらの slit は動かず分岐点のみが動いていることになる。点 q は $w=0$ 上にあって分岐点でない。$\psi_q^t{=}\Psi_q(w,t)dw$ とすれば $\Psi_q(w,t)$ は t,w に関して正則となる。ψ_q^t は境界上純虚な挙動を持っていたから $\Psi_q(w,t)$ は w を固定すれば境界上定数、従って被覆面上定数となる。ここで動いている分岐点があれば ψ_q^t は分岐点でつながった被覆葉で同じ挙動を持つことになる。その同じ w 上の 2 点から一方を q まで分岐点には当たらないような曲線に沿って接続すれば 他方は q 以外の点に至る。この q 以外の点では ψ_q^t は正則（q の対称点の時は $-\frac{1}{z}$ の特異性を示す）であり、q におけるものとは異なる展開を持つことになって解析接続の結果と矛盾することになる。結局動く分岐点はないこととなり R_t はまったく動かない。

定理 **6.** 種数 g 境界成分 $m\ (>0)$ の有限型の境界付きリーマン面 R_t が擬等角正則変動しているとき、$2g+m+1$ 個の点 $\{p_i\}$ でロバン定数 $\gamma_t(p_i)$ が t に関し調和に動くならば、 R_t はすべて等角同値。

$\psi^t_{p_1}$ はリーマン面のダブルまで拡張されそこでの零の個数は $2(2g+m-1)$、 極の個数は 2 である。そこで R_t 上の零は高々 $2g+m-1$ 個だから、 $\{p_i\}_{i=2,\ldots,2g+m+1}$ のどれかは $\psi^t_{p_1}$ の零ではない。上記により結論を得る。

References

[1] H. Yamaguchi : Sur le mouvement des constantes de Robin, *J. Math. Kyoto Univ., 15* 1975, 53-71

[2] H. Yamaguchi : Parabolicité d'une fonction entière, *J. Math. Kyoto Univ., 16* 1976, 71-92

[3] H. Yamaguchi : Calcul des variations analytiques, *Jap. J. Math. New Seris.,* 1981, 319-377

[4] F. Maitani : Variation of meromorphic differentials under quasiconformal deformations, *J. Math. Kyoto Univ., 24* 1984, 49-66

[5] F. Maitani : Covering properties of extremal vertical slit mappings, *Kodai Math. J., 11* 1988, 361-371

[6] H. Yamaguchi and F. Maitani : Variation of Three Metrics on the Moving Riemann Surfaces, preprint